COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

Determinaţi $a,b,c,d \in \mathbf{Z}^*$, ştiind că $\frac{ab}{a+b}=\frac{bc}{b+c}=\frac{cd}{c+d}=\frac{4(d+a)}{da}$.

Subiectul 2.

Fie $N=6^{2017}$. Notăm cu m numărul divizorilor lui N şi fie $A=\{d_1,d_2,...,d_m\}$ mulţimea divizorilor lui N astfel încât $1=d_1<d_2<...<d_m=N$ şi $S=d_1+d_2+...+d_m$.

a) Determinaţi m şi d_{m-3}.

b) Arătaţi că produsul $d_i \cdot d_{i+1}$ este un număr par, pentru orice $i \in \{1,2,...,m-1\}$.

c) Arătaţi că S este divizibil cu 3.

Subiectul 3 .

Fie triunghiul *ABC* în care se notează cu *D* simetricul centrului de greutate faţă de mijlocul segmentului (*AB*) şi cu *E* simetricul punctului *C* faţă de *B*. Arătaţi că punctele *A, D, E* sunt coliniare şi $AD=\frac{1}{3}AE$.

Subiectul 4.

Fie pătratul *ABCD* şi *O* punctul de intersecţie al diagonalelor sale, iar punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt mijloacele segmentelor [*AB*], [*BO*], [*DC*], respectiv [*DM*], $NP \cap AC=\{E\}$.

a) Demonstraţi că $[NE]\equiv[EP]$.

b) Demonstraţi că triunghiul *PQN* este isoscel.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

COLEGIUL NAŢIONAL „VASILE LUCACIU” BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
BAREM DE CORECTARE CLASA A VII-A

Subiectul 1.

Să se determine $a,b,c,d \in \mathbb{Z}^*$, ştiind că $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{cd}{c+d}=\dfrac{4(d+a)}{da}$.

Soluție: $ab(b+c)=bc(a+b) \Leftrightarrow a=c$ **(1p)**

$bc(c+d)=cd(b+c) \Leftrightarrow b=d$ **(1p)**

Din $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{4(d+a)}{da} \Leftrightarrow a^2b^2=4(a+b)^2 \Leftrightarrow |ab|=|2(a+b)| \Leftrightarrow ab=\pm 2(a+b)$ **(1p)**

<u>Caz I</u> $ab=2(a+b) \overset{b\neq 2}{\Rightarrow} a=\dfrac{2b}{b-2} \Rightarrow b-2|2b \Rightarrow b-2|4 \Rightarrow b\in\{-2,1,3,4,6\}$

$\Rightarrow (a,b)\in\{(6,3),(-2,1),(4,4),(3,6),(1,-2)\}$ **(2p)**

<u>Caz II</u> $ab=-2(a+b) \overset{b\neq -2}{\Rightarrow} a=\dfrac{-2b}{b+2} \Rightarrow b+2|-2b \Rightarrow b+2|4 \Rightarrow b\in\{-1,-3,-4,2,-6\}$

$\Rightarrow (a,b)\in\{(-6,-3),(2,-1),(-4,-4),(-3,-6),(-1,2)\}$ **(2p)**

Subiectul 2.

Fie $N=6^{2017}$. Notăm cu m numărul divizorilor lui N şi fie $A=\{d_1,d_2,...,d_m\}$ mulţimea divizorilor lui N astfel încât $1=d_1<d_2<...<d_m=N$ şi $S=d_1+d_2+...+d_m$.

a) Determinaţi m şi d_{m-3}.

b) Arătaţi că produsul $d_i\cdot d_{i+1}$ este un număr par, pentru orice $i\in\{1,2,...,m-1\}$.

c) Arătaţi că S este divizibil cu 3.

Soluție: $N=6^{2017}=2^{2017}\cdot 3^{2017}$

a) $m=(2017+1)\cdot(2017+1)=2018^2$ **(1p)**

$N=d_1\cdot d_m=d_2\cdot d_{m-1}=d_3\cdot d_{m-2}=d_4\cdot d_{m-3}$ **(1p)**

Cum $d_4=4 \Rightarrow d_{m-3}=\dfrac{N}{4}=2^{2015}\cdot 3^{2017}$ **(1p)**

b) Presupunem că există $i\in\{1,2,...,m-1\}$ astfel încât $d_i\cdot d_{i+1}$ este un număr impar, deci d_i, d_{i+1} sunt numere impare.

Cum divizorii impari ai lui N sunt puteri ale lui 3, rezultă că există $0\le a\le 2016$ astfel încât $d_i=3^a$, $d_{i+1}=3^{a+1}$.

Dar $3^a<2\cdot 3^a<3^{a+1} \Rightarrow d_i<2\cdot 3^a<d_{i+1}$, fals, pentru că $2\cdot 3^a$ este şi el divizor al lui N. **(2p)**

c) $S=(1+2+2^2+...+2^{2017})\cdot 3^0+(1+2+2^2+...+2^{2017})\cdot 3^1+...+(1+2+2^2+...+2^{2017})\cdot 3^{2017}$

Observăm că este suficient să demonstrăm că $S'=1+2+2^2+...+2^{2017} \vdots 3$

$S'=(1+2)+2^2(1+2)+...+2^{2016}(1+2) \vdots 3$ **(2p)**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro
COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU

Subiectul 3 .

Fie triunghiul ABC în care se notează cu D simetricul centrului de greutate faţă de mijlocul segmentului (AB) şi cu E simetricul punctului C faţă de B. Arătaţi că punctele A, D, E sunt coliniare şi $AD = \frac{1}{3}AE$.

Soluție:

$AM = MB$ şi $GM = MD \Rightarrow ADBG$ paralelogram $\Rightarrow AD \parallel BG$ **(1)** **(2p)**

Din BG linie mijlocie în $\Delta CDE \Rightarrow BG \parallel DE$**(2)** **(2p)**

Din **(1)** şi **(2)** rezultă că punctele A, D, E sunt coliniare **(1p)**

şi că $AD = BG = \frac{1}{2}DE \Rightarrow AD = \frac{1}{3}AE$. **(2p)**

Subiectul 4.

Fie pătratul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie al diagonalelor sale, iar punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BO]$, $[DC]$, respectiv $[DM]$, $NP \cap AC = \{E\}$.

a) Demonstraţi că $[NE] \equiv [EP]$.

b) Demonstraţi că triunghiul PQN este isoscel.

Soluție: a) Fie $PF \perp AC$. **(1p)**

PF este linie mijlocie în $\Delta COD \Rightarrow PF = \frac{DO}{2} = \frac{BO}{2} = NO$

$\Delta NOE \equiv \Delta PFE (C.U) \Rightarrow PE = NE$ **(2p)**

b) MN este linie mijlocie în triunghiul AOB $\Rightarrow MN \parallel AO \Rightarrow m\angle(MND) = 90^\circ$. **(1p)**

NQ este mediană în $\Delta DMN \Rightarrow NQ = \frac{1}{2}DM$. **(1p)**

În triunghiul DPM, dreptunghic, PQ este mediană

$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}DM \Rightarrow NQ = PQ \Rightarrow \Delta PQN$ este isoscel. **(2p)**